La deducción

Hemos visto ya cómo se lleva a cabo la formalización de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico y también los principales métodos que nos permiten decidir si una fórmula es o no válida. Nos queda por ver ahora cómo puede obtenerse una conclusión partiendo de un conjunto de premisas dadas, y para ello necesitamos recurrir a otras técnicas o métodos. Es decir, necesitamos saber cómo se construyen pruebas formales o deducciones.

Los procedimientos o métodos de deducción son de dos tipos: *axiomáticos y naturales.* Los métodos axiomáticos presentan un razonamiento formal que guarda poco parecido con el proceso del razonamiento ordinario y esencialmente consisten en, una vez dados los símbolos primitivos y las reglas de formación de fórmulas, tomar una serie de fórmulas como leyes iniciales del sistema, llamadas *axiomas,* y obtener a partir de ellas, mediante las reglas de transformación, ulteriores leyes llamadas *teoremas.* En cambio, los métodos de deducción natural aproximan el razonamiento formal al razonamiento ordinario, caracterizándose por prescindir de los axiomas y utilizar -sólo símbolos primitivos, reglas de formación de fórmulas y reglas, de inferencia que se introducen siguiendo el uso "natural" u ordinario de los conectores lógicos.

Aquí seguiremos el cálculo de deducción natural y lo consideraremos primero desde un. criterio sintáctico —el cálculo de enunciados tipo-GENTZEN— y después desde un criterio semántico —tablas semánticas tipo SMULLYAN y JEFFREY.

CALCULO DE ENUNCIADOS

En el cálculo lógico, la derivación formal se presenta como una sucesión de enunciados donde cada uno de ellos es o bien una premisa o bien se deduce de las premisas por medio de una regla de inferencia, de modo tal que el último enunciado es la conclusión. Tales enunciados aparecen colocados en una secuencia de líneas finita y ordenada numéricamente en orden creciente a partir de 1.

Según esto, en la deducción formal nos encontramos con los elementos siguientes: *premisas o supuestos* que pueden ser de dos tipos, a saber, *supuestos iniciales*, que son enunciados dados desde el principio de la derivación, y *supuestos subsidiarios,* que son enunciados que se introducen provisionalmente en el desarrollo de una derivación y que necesariamente deben ser cancelados o descargados obteniendo el enunciado deseado antes de llegar a la conclusión; *lineas inferidas* de otra o de otras anteriores mediante la aplicación de reglas de inferencia; *reglas de inferencia*, que son esquemas metalingüísticos que permiten obtener un enunciado a partir de otro u otros previos; y *conclusión.*

Para construir una deducción formal procederemos de la siguiente manera:

Escribiremos primero las premisas o supuestos iniciales, si los hay, designándolos, con una línea horizontal a la izquierda del número correspondiente y teniendo en cuenta que su orden de colocación es indiferente. Y escribiremos también la conclusión en la parte derecha de la línea correspondiente al último supuesto inicial. Para designar la conclusión utilizaremos el símbolo " ", denominado *deductor, y* que se lee "por tanto", "se sigue de", etc. Así, si se nos pidiera que de las premisas $p \wedge t \Rightarrow r \wedge s$, $q \Rightarrow t$, $q \wedge w$ derivásemos la conclusión $p \Rightarrow s$, entonces escribiríamos:

— 1 $p \wedge t \Rightarrow r \wedge s$
— 2 $q \Rightarrow t$
— 3 $q \wedge w$ $\qquad p \Rightarrow s$

En segundo lugar, inferiremos, si es posible, nuevas líneas encaminadas a la obtención de la conclusión, aplicando las reglas de inferencia a las premisas iniciales. Para indicar las reglas de inferencia aplicadas colocamos a la derecha de la línea pertinente la abreviatura de la regla seguida del número o números de la línea o líneas de derivación precedentes en las que nos hayamos apoyado al aplicar la regla. Siguiendo con el ejemplo anterior, tendríamos:

— 1 $p \wedge t \Rightarrow r \wedge s$
— 2 $q \Rightarrow t$
— 3 $q \wedge w$ $\qquad\qquad p \Rightarrow s$
4 q EC1 3
5 t E I 2,4

En caso de que no se pudieran aplicar reglas de inferencia sobre las premisas iniciales o si, como en el presente ejemplo, una vez aplicadas no se hubiera obtenido la conclusión, entonces, y con miras a ésta, se introducen los supuestos subsidiarios necesarios —que deberán ser cancelados— y se continúa aplicando las reglas de inferencia hasta obtener la conclusión deseada:

— 1 $p \wedge t \Rightarrow r \wedge s$
— 2 $q \Rightarrow t$
— 3 $q \wedge w$ $\qquad\qquad p \Rightarrow s$
4 q EC1 3
5 t EI 2,4
6 p
7 $p \wedge t$ IC 5,6
8 $r \wedge s$ EI 1,7
9 s EC2 8
10 $p \Rightarrow s$ II 6-9

Para designar los supuestos subsidiarios utilizaremos un corchete colocado a la parte izquierda, que comienza en la línea donde se introduce el supuesto subsidiario y termina en la línea en que se cancela dicho supuesto.
Hay que tener en cuenta que cuando se introduzcan dos o más supuestos subsidiarios, los corchetes de cancelación no deben interferirse.

SI

En el ejemplo anterior hemos construido una derivación en la que se nos pedía obtener una conclusión a partir de supuestos iniciales. Pero también puede darse el caso de que tengamos que construir una derivación en la que se nos pida obtener una conclusión sin que para ello dispongamos de supuestos iniciales. En ese caso debemos comenzar por introducir cuantos supuestos subsidiarios sean necesarios para obtener la conclusión, teniendo siempre presente que deben ser cancelados correcta y previamente. Así, si se nos pidiese construir una deducción formal de

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$

procederíamos de esta manera:

1 p
2 q
3 $p \wedge q$ IC 1,2
4 $q \Rightarrow p \wedge q$ II 2-3
5 $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$ II 1-4

El cálculo de deducción natural tipo GENTZEN para la *lógica de enunciados* consta de dos clases de reglas de inferencia: básicas y derivadas.

Reglas básicas

Las reglas básicas son de dos tipos: reglas *de introducción y* reglas de *eliminación* de conectores. Como los conectores fundamentales son cuatro ($\neg, \wedge$, v,$\Rightarrow$) y hay dos reglas por conector, una para introducirlo y otra para eliminarlo, entonces tendremos un total de ocho reglas básicas que son las siguientes:

Reglas básicas de implicación

a) *1.Eliminación de* implicador (EI) o Modus Ponens (MP)

$A \Rightarrow B$
A

B

Esta regla permite eliminar el implicador, y nos dice que si en una línea de una derivación contamos con una implicación, $A \Rightarrow B$, y en otra línea tenemos el antecedente, A, de dicha implicación, entonces podemos escribir en una nueva línea su consecuente, B.

EJERCICIOS:

1)
— 1 $p \Rightarrow q$
— 2 $q \Rightarrow r$
— 3 p   r
4 q   EI 1,3
5 r   EI 2,4

2)
— 1 $p \wedge q \Rightarrow q$
— 2 $r \Rightarrow s$
— 3 $p \wedge q$ s
4 r   EI 1,3
5 s   EI 2,4

3)
— 1 p v q $\Rightarrow$ r
— 2 $r \Rightarrow s \wedge t$
— 3 p v q $s \wedge t$
4 r   EI 1,3
5 $s \wedge t$ EI 2,4

4)
— 1 $p \Rightarrow q$
— 2 p
— 3 $q \Rightarrow r$ s
— 4 $r \Rightarrow s$
5 q   EI 1,2
6 r   EI 3,5
7 s   EI 4,6

5)
— 1 $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $q \wedge r \Rightarrow s$
— 3 $s \Rightarrow t$ $\qquad$ t
— 4 p
5 $q \wedge r$ EI 1,4
6 s EI 2,5
7 t EI 3,6

6)
— 1 $\neg r$
— 2 $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg s)$
— 3 $\neg p \vee \neg q$ $\qquad$ $\neg s$
4 $\neg r \Rightarrow \neg s$ EI 2,3
5 $\neg s$ EI 4,1

7)
— 1 $r \vee s$
— 2 $p \Rightarrow \neg q \vee r$
— 3 $(p \Rightarrow \neg q \vee r) \Rightarrow (r \vee s \Rightarrow t \wedge \neg s)$ $\qquad$ $t \wedge \neg s$
4 $r \vee s \Rightarrow t \wedge \neg s$ EI 3,2
5 $t \wedge \neg s$ EI 4,1

2.- Introducción del implicador (II) o teorema de Deducción

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}$$

Esta regla permite introducir el implicador, y nos dice que si en una línea de una derivación introducimos un supuesto, A, del que derivamos la conclusión B en otra línea, entonces podemos escribir A ->• B en una nueva línea.

EJERCICIOS:

8)
— 1 $p \Rightarrow q$
— 2 $q \Rightarrow r$
3 p $\qquad$ $p \Rightarrow r$
4 q EI 1,3
5 r EI 2,4
6 $p \Rightarrow r$ II 3-5

9)

— 1 $p \Rightarrow q$
— 2 $q \Rightarrow r \wedge t$
— 3 $r \wedge t \Rightarrow s$
— 4 $s \Rightarrow t$
5 p $\qquad$ $p \Rightarrow t$
6 q $\qquad$ EI 1,5
7 $r \wedge t$ $\qquad$ EI 2,6
8 s $\qquad$ EI 3,7
9 t $\qquad$ EI 4,8
10 $p \Rightarrow t$ $\qquad$ II 5-9

10)

— 1 $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $q \wedge r \Rightarrow s \vee t$
— 3 $s \vee t \Rightarrow (w \Rightarrow r)$
4 p $\qquad$ $p \Rightarrow (w \Rightarrow r)$
5 $q \wedge r$ $\qquad$ EI 1,4
6 $s \vee t$ $\qquad$ EI 2,5
7 $w \Rightarrow r$ $\qquad$ EI 3,6
8 $p \Rightarrow (w \Rightarrow r)$ $\qquad$ II 4-7

11)

— 1 $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $q \wedge r \Rightarrow s \vee t$
— 3 $s \vee t \Rightarrow (w \wedge m)$
4 p $\qquad$ $p \Rightarrow (w \wedge m)$
5 $q \wedge r$ $\qquad$ EI 1,4
6 $s \vee t$ $\qquad$ EI 2,5
7 $w \wedge m$ $\qquad$ EI 3,6
8 $p \Rightarrow (w \wedge m)$ $\qquad$ II 4-7

12)

— 1 $p \wedge q \Rightarrow r$
— 2 $r \Rightarrow s \wedge t$
— 3 $s \wedge t \Rightarrow w$
4 $p \wedge q$ $\qquad$ $p \wedge q \Rightarrow w$
5 r $\qquad$ EI 1,4
6 $s \wedge t$ $\qquad$ EI 2,5
7 w $\qquad$ EI 3,6
8 $p \wedge q \Rightarrow w$ $\qquad$ II 4-7

13)

— 1 $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r \vee s)$
2 q $\qquad$ $q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow r \vee s)$
3 $\neg p$
4 $q \Rightarrow r \vee s$ $\qquad$ EI 1,3
5 $r \vee s$ $\qquad$ EI 4,2
6 $\neg p \Rightarrow r \vee s$ $\qquad$ II 3-5
7 $q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow r \vee s)$ $\qquad$ II 2-6

14)

— 1 $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow s))$
2 q — $q \Rightarrow (r \Rightarrow (p \Rightarrow s))$
3 r
4 p
5 $q \Rightarrow (r \Rightarrow s)$ EI 1,4
6 $r \Rightarrow s$ EI 5,2
7 s EI 6,3
8 $p \Rightarrow s$ II 4-7
9 $r \Rightarrow (p \Rightarrow s)$ II 3-8
10 $q \Rightarrow (r \Rightarrow (p \Rightarrow s))$ II 2-9

Reglas básicas de conjunción:

***1*. ELIMINACIÓN DEL CONJUNTOR (EI) o *Simplificación* (Simp)**

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \text{EC1} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \text{EC2}$$

Esta regla permite eliminar el conjuntor y nos dice que si en una línea de una derivación tenemos una conjunción de dos enunciados, $A \wedge B$, podemos escribir cualquiera de sus miembros en una nueva línea.

EJERCICIOS:

15)

— 1 $p \Rightarrow q$
— 2 $q \Rightarrow r \wedge s$
— 3 $p \wedge r$
4 p EC1 3 — s
5 q EI 1,4
6 $r \wedge s$ EI 2,5
7 s EC2 6

16)

— 1 $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $r \Rightarrow s \wedge t$
— 3 p
4 $q \wedge r$ EI 1,3 — $p \Rightarrow t$
5 r EC2 4
6 $s \wedge t$ EI 2,5
7 t EC2 6
8 $p \Rightarrow t$ II 3-7

17)
— 1 $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $r \Rightarrow s \wedge t$
— 3 $p \wedge s$

4 p	EC1 3	t
5 $q \wedge r$	EI 1,4	
6 r	EC2 5	
7 $s \wedge t$	EI 2, 6	
8 t	EC2 7	

18)
— 1 $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow r \wedge s)$
— 2 $t \wedge (p \wedge q)$

3 $p \wedge q$	EC2 2	
4 $p \Rightarrow r \wedge s$	EI 1, 3	s
5 p	EC1 3	
6 $r \wedge s$	EI 4, 5	
7 s	EC2 6	

19)
— 1 $\neg\neg p \wedge (\neg\neg q \Rightarrow t \wedge \neg s)$
— 2 $\neg\neg p \Rightarrow (\neg\neg q \wedge \neg\neg r)$

3 $\neg\neg p$	EC1 1	
4 $\neg\neg q \wedge \neg\neg r$	EI 2, 3	$\neg s$
5 $\neg\neg q \Rightarrow t \wedge \neg s$	EC2 1	
6 $\neg\neg q$	EC1 4	
7 $t \wedge \neg s$	EI 5, 6	
8 $\neg s$	EC2 7	

***INTRODUCCIÓN D*EL CONJUNTOR (I.C.)**

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A \wedge B}$$

Esta regla permite introducir el conjuntor, y nos dice que si en una línea de una derivación tenemos un enunciado A, y en otra línea tenemos un enunciado B, entonces podemos escribir su conjunción $A \wedge B$, en una nueva línea.

EJERCICIOS

20)
— 1 $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $q \wedge r \Rightarrow s \vee t$
— 3 $s \vee t \Rightarrow w$
— 4 p

5 $q \wedge r$	EI 1, 4	
6 $s \vee t$	EI 2, 5	$p \wedge w$
7 w	EI 3, 6	
8 $p \wedge w$	IC 4, 7	

21)

— 1	$p \Rightarrow q \wedge r$		
— 2	p		
— 3	$p \Rightarrow s \wedge t$		
4	$q \wedge r$	EI 1, 2	
5	$s \wedge t$	EI 3, 2	$q \wedge s$
6	q	EC1 4	
7	s	EC1 5	
8	$q \wedge s$	IC 6,7	

22)

— 1	$p \wedge q \Rightarrow r$		
— 2	p		
— 3	q		
— 4	$q \Rightarrow s$		
5	$p \wedge q$	IC 2, 3	
6	r	EI 1, 5	$r \wedge s$
7	s	EI 4, 3	
8	$r \wedge s$	IC 6,7	

23)

— 1	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \neg s)$		
— 2	$(\neg r \vee s) \wedge (p \wedge (\neg q \Rightarrow t))$		
3	$p \wedge (\neg q \Rightarrow t)$	EC2 2	
4	p	EC1 3	
5	$(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \neg s)$	*EI 1,4*	$(\neg q \Rightarrow t) \wedge (r \Rightarrow \neg s)$
6	$\neg q \Rightarrow t$	EC2 3	
7	$r \Rightarrow \neg s$	EC2 5	
8	$(\neg q \Rightarrow t) \wedge (r \Rightarrow \neg s)$	IC 6,7	

24)

— 1	$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg s \Rightarrow t)$		
— 2	$\neg r \Rightarrow \neg p$		
— 3	$(r \Rightarrow \neg t) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$		
4	$p \Rightarrow \neg q$	EC2 3	
5	$\neg s \Rightarrow t$	EI 1,4	
6	$(\neg s \Rightarrow t) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p)$	IC 5,2	$(\neg s \Rightarrow t) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p)$

***INTRODUCCIÓN D*EL DISYUNTOR (I.D.)**

ID1	ID2
A	B
--------	--------
A V B	A V B

Esta regla permite introducir el disyuntor, y nos dice que si en una línea de una derivación tenemos un enunciado, A, entonces podemos escribir en una nueva línea dicho enunciado unido mediante el disyuntor a otro enunciado cualquiera, así A V B.

EJERCICIOS

25)

— 1	$r \wedge t \Rightarrow \neg q$		
— 2	$r \wedge t$		$\neg q \vee (\neg r \Rightarrow t)$
3	$\neg q$	EC2 3	
4	$\neg q \vee (\neg r \Rightarrow t)$	ID1 3	

26)

— 1	$r \Rightarrow s$		
— 2	$p \wedge r$		$(q \wedge p) \vee s$
3	r	EC2 2	
4	s	EI 1, 3	
5	$(q \wedge p) \vee s$	ID2 4	

27)

— 1	$p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$		
— 2	q		$p \Rightarrow s \vee t$
3	p		
4	$p \wedge q$	IC 2, 3	
5	$r \wedge s$	EI 1, 4	
6	s	EC2 5	
7	$s \vee t$	ID1 6	
8	$p \Rightarrow s \vee t$	II 3-7	

28)

— 1	$p \vee q \Rightarrow r$		
— 2	$p \wedge s$		$r \vee t$
3	p	EC1 2	
4	$p \vee q$	ID1 3	
5	r	EI 1, 4	
6	$r \vee t$	ID1 5	

29)

— 1	$r \Rightarrow p \wedge q$		
— 2	$p \wedge m \Rightarrow s$		$s \vee n$
— 3	$q \Rightarrow m$		
— 4	$r \wedge t$		
5	r	EC1 4	
6	$p \wedge q$	EI 1, 5	
7	q	EC2 6	
8	m	EI 3, 7	
9	p	EC1 6	
10	$p \wedge m$	IC 8, 9	
11	s	EI 2, 10	
12	$s \vee n$	ID1 11	

ELIMINACIÓN D**EL DISYUNTOR (E.D.)**

A v B
A

C
B

C

C

Esta regla permite eliminar el disyuntor, y nos dice que si en una línea de una derivación tenemos una disyunción, A v B, y en otra línea introducimos el supuesto A, primer miembro de la disyunción, del que se sigue la conclusión C, y en otra línea introducimos el supuesto B, segundo miembro de la disyunción, del que se sigue la misma conclusión C, entonces podemos escribir C en una nueva línea.

EJERCICIOS

30)

— 1 p v ¬q ⇒ (q v r) ∧ (¬s v ¬t)
— 2 q ⇒ s   p ⇒ s
— 3 r ⇒ s
4 p
5 p v ¬q   ID1 4
6 (q v r) ∧ (¬s v ¬t)   EI 1,5
7 q v r   EC1 6
8 q
9 s   EI 2, 8
10 r
11 s   EI 3,10
12 s   ED 7, 8-9, 10-11
13 p ⇒ s   II 3-12

31)

— 1 p ∧ q ⇒ r v s
— 2 p ∧ (r ⇒ t)   t
— 3 q ∧ (s ⇒ t)
4 p   EC1 2
5 q   EC1 3
6 p ∧ q   IC 4,5
7 r v s   EI 1,6
8 r ⇒ t   EC2 2
9 s ⇒ t   EC2 3
12 r
13 t   EI 8, 12
14 s
15 t   EI 9, 13
16 t   ED 7, 12-13, 14-15

32)

—	1	$r \Rightarrow p \vee q$		
—	2	$p \Rightarrow s$		$s \vee m$
—	3	$q \Rightarrow m$		
—	4	$r \wedge t$		
	5	r	EC1 4	
	6	$p \vee q$	EI 1,5	
	7	p		
	8	s	EI 2, 7	
	9	$s \vee m$	ID1 8	
	10	q		
	11	m	EI 3, 10	
	12	$s \vee m$	ID2 11	
	13	$s \vee m$	ED 6, 7-9 10-12	

33)

—	1	$p \vee q$		
—	2	$p \Rightarrow r$		$s \vee m$
—	3	$r \Rightarrow s$		
—	4	$q \Rightarrow t$		
—	5	$t \Rightarrow s$		
	6	p		
	7	r	EI 2,6	
	8	s	EI 3,7	
	9	q		
	10	t	EI 4,9	
	11	s	EI 5,10	
	12	s	ED 1, 6-8, 9-12	
	13	$s \vee m$	ID1 12	

34)

—	1	$p \vee q \Rightarrow r$		
—	2	$r \vee t \Rightarrow s \wedge m$		$p \Rightarrow s \vee m$
	3	p		
	4	$p \vee q$	ID1 3	
	5	r	EI 1,3	
	6	$r \vee t$	ID1 5	
	7	$s \wedge m$	EI 2,7	
	8	s	EC1 7	
	9	$s \vee n$	ID1 8	
	10	$p \Rightarrow s \vee n$	II 3-9	

35)

— 1	$p \wedge q \Rightarrow r \vee s$	
— 2	$p \Rightarrow q$	$t \vee n$
— 3	$p \wedge (r \Rightarrow t \wedge m)$	
— 4	$s \Rightarrow n \wedge o$	
5	p	EC1 3
6	q	EI 2,5
7	$p \wedge q$	IC 5,6
8	$r \vee s$	EI 1, 7
9	$r \Rightarrow t \wedge m$	EC2 3
10	r	
11	$t \wedge m$	EI 9,10
12	t	EC1 11
13	$t \vee n$	ID1 12
14	s	
15	$n \wedge o$	EI 4,14
16	n	EC1 15
17	$t \vee n$	ID2 16
18	$t \vee n$	ED 8, 10-13, 14-17

36)

— 1	$p \wedge (q \vee r)$	
— 2	$q \wedge p \Rightarrow s$	$s \vee t$
— 3	$p \vee r \Rightarrow t$	
4	p	EC1 3
5	$p \vee r$	ID1 4
6	t	EI 3,5
7	$s \vee t$	ID2 6

37)

— 1	$p \vee q \Rightarrow r \vee s$	
— 2	$r \Rightarrow t$	$p \Rightarrow t \vee m$
— 3	$s \Rightarrow m \wedge n$	
4	p	
5	$p \vee q$	ID1 5
6	$r \vee s$	EI 1,5
7	r	
8	t	EI 2, 7
9	$t \vee m$	ID1 8
10	s	
11	$m \wedge n$	EI 3,10
12	m	EC1 11
13	$t \vee m$	ID2 12
14	$t \vee m$	ED 6, 7-9, 10-13
15	$p \Rightarrow t \vee m$	II 4-14

38)

— 1 p ⇒ s
— 2 q ⇒ t   p ⇒ (q ⇒ r)
— 3 s ∧ t ⇒ r
4 p
5 s   EI 1,4
6 q
7 t   EI 2,6
8 s ∧ t   IC 5,7
9 r   EI 3,8
10 q ⇒ r   II 6-9
11 p ⇒ (q ⇒ r)   II 4-10

39)

— 1 q v r
— 2 q ⇒ p ∧ s   m v s
— 3 r ⇒ m ∧ t
4 q
5 p ∧ s   EI 2,4
6 s   EC2 5
7 m v s   ID2 6
8 r
9 m ∧ t   EI 3,8
10 m   EC1 9
11 m v s   ID1 10
12 m v s   ED 1, 4-7, 8-10

***ELIMINACIÓN D*EL NEGADOR (E.N.)**

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Esta regla permite eliminar el negador, y nos dice que si en una línea de una derivación tenemos un enunciado con doble negación, ¬¬A, entonces podemos escribir en una nueva línea el mismo enunciado afirmado, A.

40)

— 1 p ∧ ¬¬q
2 ¬¬q   EC2 1   q
3 q   EN 2

41)

— 1 ¬¬s ∧ ¬¬t
2 ¬¬s   EC1 1   s ∧ t
3 s   EN 2
4 ¬¬t   EC2 1
5 t   EN 4
6 s ∧ t   IC 3,5

42)

— 1 $p \lor q \Rightarrow \neg\neg r$
— 2 $\neg\neg q \land \neg\neg s$ $\qquad$ $r \lor t$

3	$\neg\neg q$	EC1 2
4	q	EN 3
5	$p \lor q$	ID2 4
6	$\neg\neg r$	EI 1,5
7	r	EN 6
8	$r \lor t$	ID1 7

43)

— 1 $\neg\neg(p \Rightarrow \neg\neg q)$
— 2 p $\qquad$ $(p \land q) \lor s$

3	$p \Rightarrow \neg\neg q$	EN 1
4	$\neg\neg q$	EI 2, 3
5	q	EN 4
6	$p \land q$	IC 2,5
7	$(p \land q) \lor s$	ID1 6

44)

— 1 $p \Rightarrow q$
— 2 $q \lor r \Rightarrow \neg\neg (r \land s)$ $\qquad$ $r \land s$
— 3 $p \land s$

4	p	EC1 3
5	q	EI 1, 4
6	$q \lor r$	ID1 5
7	$\neg\neg (r \land s)$	EI 2, 6
8	$r \land s$	EN 7

45)

— 1 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
— 2 $p \Rightarrow \neg\neg q$ $\qquad$ $p \land t \Rightarrow r$

3	$p \land t$	
4	p	EC1 3
5	$\neg\neg q$	EI 2, 4
6	q	EN 5
7	$q \Rightarrow r$	EI 1, 4
8	r	EI 6, 7
9	$p \land t \Rightarrow r$	II 3-8

***INTRODUCCIÓN D*EL NEGADOR (I.N.)**

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \\ B \land \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Esta regla permite introducir el negador, y nos dice que si en una línea de una derivación introducimos un supuesto, A, y a partir de él obtenemos como conclusión una contradicción, $B \wedge \neg B$, en otra línea, entonces podemos escribir la negación de dicho supuesto, $\neg A$, en una nueva línea.

46)

— 1	$p \Rightarrow \neg q$	
4	p	
5	$\neg q$	EI 1, 4
6	r	EI 2, 5
7	$r \wedge \neg r$	IC 3,6
8	$\neg p$	IN 4-7

47)

— 1	$p \Rightarrow \neg (q \wedge r)$	$q \wedge r \Rightarrow \neg p$
2	$q \wedge r$	
3	p	
4	$\neg (q \wedge r)$	EI 1, 3
5	$(q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge r)$	IC 2,4
6	$\neg p$	IN 3-5
7	$q \wedge r \Rightarrow \neg p$	EI 2-6

48)

— 1	$p \vee s \Rightarrow \neg (q \wedge r)$	$\neg t$
— 2	$t \Rightarrow w \vee m$	
— 3	$w \Rightarrow p$	
— 4	$m \Rightarrow s$	
— 5	$\neg (q \wedge r) \Rightarrow \neg t$	
6	t	
7	$w \vee m$	EI 1, 4
8	w	
9	p	EI 3,8
10	$p \vee s$	ID1 9
11	m	
12	s	EI 4,11
13	$p \vee s$	ID2 12
14	$p \vee s$	ED 7, 8-10, 11-13
15	$\neg (q \wedge r)$	EI 1, 14
16	$\neg t$	EI 5, 15
17	$t \wedge \neg t$	IC 6,16
18	$\neg t$	II 6-17

49)

— 1	$p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$	$\neg (r \wedge s) \Rightarrow \neg (p \wedge q)$
2	$\neg (r \wedge s)$	
3	$p \wedge q$	
4	$r \wedge s$	EI 1, 3
5	$(r \wedge s) \wedge \neg (r \wedge s)$	IC 2,4
6	$\neg (p \wedge q)$	IN 3-5
7	$\neg (r \wedge s) \Rightarrow \neg (p \wedge q)$	II 2-6

50)

— 1 $p \wedge q \Rightarrow \neg r$ $\qquad r \Rightarrow \neg p$
— 2 $q \wedge t$
3 r
4 p
5 q EC1 2
6 $p \wedge q$ IC 4, 5
7 $\neg r$ EI 1,6
8 $r \wedge \neg r$ IC 3,7
9 $\neg p$ IN 4-8
10 $r \Rightarrow \neg p$ II 3-9

51)

— 1 $p \Rightarrow \neg q \wedge r$ $\qquad p \Rightarrow s$
— 2 $r \Rightarrow q$
3 p
4 $\neg s$
5 $\neg q \wedge r$ EI 1,3
6 r EC2 5
7 q EI 2,6
8 $\neg q$ EC1 5
9 $q \wedge \neg q$ IC 7,8
10 $\neg\neg s$ IN 4-9
11 s EN 10
12 $p \Rightarrow s$ II 3-11

Estrategias de deducción mediante Reglas Básicas.

La deducción formal o derivación, a diferencia de los procedimientos de decisión explicados en el capítulo anterior, no es un procedimiento mecánico y, por tanto, sólo pueden darse indicaciones o consejos acerca de la mejor manera de proceder para llevar a cabo una deducción. He aquí, pues, algunas estrategias que pueden servir de ayuda al lector en la tarea de la derivación.

Estrategia 1ª: Principio de economía. Un argumento puede ser resuelto mediante diferentes formas de derivación y, aunque todas ellas se consideren correctas, debe escogerse siempre aquella que emplee el menor número de pasos, porque la economía es una virtud lógica. Así, el ejemplo 52 aparece resuelto de tres formas distintas, pero se considera mejor la primera porque consta de menos pasos.

52)

Primera forma

— 1 $p \wedge (q \Rightarrow (p \Rightarrow s))$ $\qquad p \Rightarrow s$
— 2 $p \Rightarrow q \wedge r$
3 p EC1 1
4 $q \Rightarrow (p \Rightarrow s)$ EC2 1
5 $q \wedge r$ EI 2,3
6 q EC1 5
7 $p \Rightarrow s$ EI 4,6

Segunda forma

— 1	$p \wedge (q \Rightarrow (p \Rightarrow s)$	$p \Rightarrow s$
— 2	$p \Rightarrow q \wedge r$	
3	p	
4	$q \Rightarrow (p \Rightarrow s)$	EC2 1
5	$q \wedge r$	EI 2,3
6	q	EC1 5
7	$p \Rightarrow s$	EI 4,6
8	s	EI 3,7
9	$p \Rightarrow s$	EI 4,6

Tercera forma

— 1	$p \wedge (q \Rightarrow (p \Rightarrow s)$	$p \Rightarrow s$
— 2	$p \Rightarrow q \wedge r$	
3	$\neg(p \Rightarrow s)$	
4	p	EC1 1
5	$q \Rightarrow (p \Rightarrow s)$	EC2 1
6	$q \wedge r$	EI 2,4
7	q	EC1 6
8	$p \Rightarrow s$	EI 5,7
9	$(p \Rightarrow s) \wedge \neg(p \Rightarrow s)$	IC 3,8
10	$\neg\neg(p \Rightarrow s)$	IN 3-9
11	$p \Rightarrow s$	EN 10

Estrategia 2ª:

Aplicación de las reglas que no introducen. supuestos *subsidiarios, salvo en la eliminación del disyuntor*. Al enfrentarnos con un argumento lo primero que debemos hacer es prestar atención a la conclusión y a las premisas iniciales e intentar obtener la conclusión mediante la aplicación directa de reglas sin introducir supuestos subsidiarios, excepto en el caso de que en las premisas o en alguna línea de la derivación aparezca una disyunción y requiera aplicar la eliminación del disyuntor.

Obsérvese a este respecto que en el ejemplo 53 no se recurre a ningún supuesto subsidiario y en el ejemplo 54 se recurre a la eliminación del disyuntor, porque en la línea 8 aparece la disyunción, s v t, que nos permite aplicar dicha regla con vistas a la obtención de la conclusión.

53)

— 1	$p \Rightarrow q$	m
— 2	$q \vee r \Rightarrow s$	
— 3	$s \Rightarrow (t \Rightarrow m)$	
— 4	$p \wedge \neg\neg t$	
5	p	EC1 4
6	q	EI 1,5
7	$q \vee r$	ID1 6
8	s	EI 2,7
9	$t \Rightarrow m$	EI 3,8
10	$\neg\neg t$	EC2 4
11	t	EN 10
12	m	EI 9,11

54)

— 1 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r \wedge (s \vee t))$ $\qquad$ $m \vee h$
— 2 $p \wedge (s \Rightarrow m)$
— 3 $q \wedge (t \Rightarrow h \wedge n)$
4 p $\qquad$ EC1 2
5 $q \Rightarrow r \wedge (s \vee t)$ $\qquad$ EI 1,4
6 q $\qquad$ EC2 3
7 $r \wedge (s \vee t)$ $\qquad$ EI 5,6
8 $s \vee t$ $\qquad$ EC2 7
9 $s \Rightarrow m$ $\qquad$ EC2 2
10 $t \Rightarrow h \wedge n$ $\qquad$ EC2 3
11 s
12 m $\qquad$ EI 9,11
13 $m \vee h$ $\qquad$ ID1 12
14 t
15 $h \wedge n$ $\qquad$ EI 10,14
16 h $\qquad$ EC1 15
17 $m \vee h$ $\qquad$ ID2 16
18 $m \vee h$ $\qquad$ ED 8, 11-13, 14-17

Estrategia 3:

Aplicación del Teorema de Deducción. Si en la conclusión interviene el implicador como conector principal, entonces quizá lo más conveniente sea aplicar la regla de Introducción del implicador o método de prueba condicional, que consiste en introducir como supuesto subsidiario en una línea de la derivación el antecedente de la implicación de la conclusión y cancelarlo en una nueva línea cuando se obtenga el consecuente de dicha implicación, escribiendo en la línea siguiente la conclusión deseada. Así, en el ejemplo 55 tenemos que:

— En la línea 4 se introduce como supuesto subsidiario el antecedente, *p*, de la implicación de la conclusión,

— En la línea 11 se obtiene $q \wedge r$, que es el consecuente de dicha implicación y, por tanto, se cancela en esta línea el supuesto subsidiario introducido en la línea 4.

— En la línea 12, que es la inmediatamente siguiente a la cancelación del supuesto subsidiario, se escribe la conclusión deseada, en este caso $p \Rightarrow q \wedge r$

55)

— 1 $p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$ $\qquad$ $p \Rightarrow q \wedge r$
— 2 $s \Rightarrow q \wedge t$
— 3 $s \wedge t$
4 p
5 s $\qquad$ EC1 3
6 $q \wedge t$ $\qquad$ EI 2,5
7 q $\qquad$ EC1 6
8 $p \wedge q$ $\qquad$ IC 4,7
9 $r \wedge s$ $\qquad$ EI 1,8
10 r $\qquad$ EC1 9
11 $q \wedge r$ $\qquad$ IC 7,10
12 $p \Rightarrow q \wedge r$ $\qquad$ II 4-11

En el ejemplo 56 tenemos que:

— En la línea 3 se introduce como supuesto subsidiario *p*, que es el antecedente de la implicación dominante de la conclusión.

— En la línea 4 se introduce también como supuesto subsidiario *q* v r, que es el antecedente de la segunda implicación de la conclusión, y al ser una disyunción nos da la base adecuada para aplicar la Introducción del disyuntor.

— En la línea 10 se obtiene s, que es el consecuente de la segunda implicación y, por tanto, se cancela en esta línea el supuesto subsidiario introducido en la línea 4.

— En la línea 11 se obtiene q v r $\Rightarrow$ s, que es el consecuente de la implicación dominante y, por ello, se cancela en esta línea el supuesto subsidiario introducido en la línea 3.

— En la línea 12 se escribe la conclusión deseada.

56)

— 1	$q \Rightarrow s$	$p \Rightarrow (q \vee r \Rightarrow s)$
— 2	$r \Rightarrow s \wedge t$	
3	p	
4	$q \vee r$	
5	q	
6	s	EI 1, 5
7	r	
8	$s \wedge t$	EI 2,7
9	s	EC1 8
10	s	ED 4, 5-6, 7-9
11	$q \vee r \Rightarrow s$	II 4-10
12	$p \Rightarrow (q \vee r \Rightarrow s)$	II 3-11

<u>Estrategia 4 °:</u> *Aplicación de la Introducción del negador.*

Cuando nos encontremos con argumentos que no podamos resolver utilizando las estrategias *2* ª *y 3* ª, entonces se debe recurrir a la regla de Reducción al Absurdo. O introducción del negador, que consiste en introducir la negación de la conclusión o de lo que se quiera probar como supuesto subsidiario en una línea de la derivación y a partir del mismo deducir una contradicción en otra línea en la que precisamente se cancela dicho supuesto, pasando en la línea siguiente a negar el supuesto del que se partió y que dió origen a la contradicción. Así, en el ejemplo *57* tenemos que:

- En la línea *3* se introduce como supuesto subsidiario $\neg p$, que es la negación de la conclusión.
- En la línea *7* se obtiene una contradicción, $q \wedge \neg q$, *y*, por tanto, se cancela en esta línea el supuesto subsidiario introducido en la línea *3*.
- En la línea *8* escribimos $\neg\neg p$, que es la negación del supuesto subsidiario del que se partió y que dio origen a la contradicción.

57)

— 1	$\neg p \Rightarrow q$	p
— 2	$\neg p \Rightarrow \neg q \wedge s$	
3	$\neg p$	
4	q	EI 1,3
5	$\neg q \wedge s$	EI 2,3
6	$\neg q$	EC1 5
7	$q \wedge \neg q$	IC 4,6
8	$\neg\neg p$	IN 3-7
9	p	EN8