Lógica proposicional

1. Introducción

1.1. LEGUAJE NATURAL, LEGUAJE ARTIFICIAL Y LENGUAJE FORMAL

Los **lenguajes naturales**, es decir, las distintas lenguas que habitualmente utilizan los miembros de distintas comunidades humanas para comunicarse, poseen, como todo lenguaje, un conjunto de **símbolos** (léxico) y una serie de **reglas** para manejarlos (sintaxis) y **operar** con ellos (formación, concatenación y transformación de oraciones). Todos los lenguajes naturales son el producto de muchos siglos de evolución y son tan infinitamente ricos en matices que los mismos símbolos o expresiones pueden significar cosas diferentes en función factores tales como el contexto, la entonación, la situación, etc. Estas ambigüedades, dobles sentidos, vaguedades, relajación en el uso de las reglas… nos permiten construir paradojas, chistes, metáforas, poemas, etc.

Los lenguajes naturales poseen, sin duda, una gran riqueza y capacidad expresiva que resulta deseable, pero en determinados momentos es preferible un lenguaje menos ambiguo y, por tanto, más preciso y operativo. Para el uso científico, por ejemplo, los lenguajes naturales presentan ciertas deficiencias: desde el punto de vista del léxico, falta de univocidad; desde el punto de vista de la sintaxis, relajación en las reglas; y desde el punto de vista operacional, dificultad para realizar cualquier cálculo. Por este motivo, las distintas ciencias construyen **lenguajes artificiales**, asignando a sus símbolos significados precisos y unívocos, y estableciendo con precisión reglas operativas eficaces que permitan construir razonamientos fiables. Se trata de ganar en exactitud y seguridad a costa de perder en expresividad. La Física y la Química, por ejemplo, usan este tipo de lenguaje de forma que una expresión tan metafórica como «el tiempo es oro», al traducirla a tal lenguaje –«t = Au»– pierde todo su sentido. Por eso, tales lenguajes sólo se emplean en campos muy restringidos.

Incluso puede haber ocasiones en las que el significado de los símbolos no nos interese, sino más bien las relaciones que podamos establecer entre dichos símbolos, como por ejemplo ocurre en las Matemáticas y la Lógica. Decimos entonces que estamos ante un **lenguaje formal,** porque sólo interesa la forma, no el contenido o significado empírico de sus símbolos. Lo único que cuenta es que la utilización de los símbolos, las fórmulas y las operaciones se ajuste a las reglas establecidas.

1.2. LAS PROPOSICIONES Y LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Todos los lenguajes están construidos a partir de combinaciones de signos que reciben el nombre de **expresiones**. Pero no cualquier combinación es válida, sino que dicha combinación debe realizarse de acuerdo con una serie de reglas gramaticales (morfológicas, sintácticas, etc.). Cuando una expresión del lenguaje natural es gramaticalmente correcta y tiene un sentido completo recibe el nombre de **oración**. Hay muchos tipos de oraciones en los lenguajes naturales: enunciativas, desiderativas, de posibilidad, dubitativas, exhortativas, interrogativas, exclamativas, etc. Aquí nos interesan las **oraciones enunciativas**, también llamadas **enunciados** o **proposiciones**, que son aquellas oraciones que afirman o niegan algo y que, por tanto, pueden ser verdaderas o falsas. La **Lógica proposicional** (denominada también Lógica de enunciados) se ocupa de las proposiciones.

Tanto lógica como gramaticalmente, las oraciones pueden ser sometidas a análisis. Tomemos, por ejemplo, la proposición «Las moscas son insectos». Gramaticalmente podemos analizar esta oración comenzando por distinguir un sujeto y un predicado. Lógicamente podemos analizarla señalando que en ella se establece una relación entre dos clases o conjuntos, en cuyo caso la interpretaremos como afirmación de que los miembros de la clase de las moscas son también miembros de la clase de los insectos: así se hace en la Lógica de clases. Pero **en la Lógica proposicional las proposiciones** no se analizan, sino que **se toman como un todo**, en bloque. Las proposiciones son los elementos últimos sobre los cuales opera esta rama de la Lógica.

Las proposiciones «Las moscas son insectos» y «La Tierra es un planeta» son proposiciones simples. En cambio, «Las moscas son insectos y la Tierra es un planeta» y «Si las moscas son insectos, entonces la Tierra es un planeta» son proposiciones complejas.

Una **proposición simple** es aquella que no puede descomponerse en partes que, a su vez, sean proposiciones. Las proposiciones simples se denominan también **atómicas**.

Una **proposición compleja** –también denominada **molecular**– es aquella que puede descomponerse en proposiciones simples. Las proposiciones complejas se componen, pues, a partir de proposiciones simples por medio de partículas como «y», «si… entonces…», etc., que sirven para conectar o unir proposiciones entre sí.

1.3. El razonamiento. Verdad y validez

Un **razonamiento** es una serie de enunciados en la cual, a partir de unos enunciados iniciales (premisas) y siguiendo unas reglas determinadas, se infiere una conclusión. Se dice que el **razonamiento** es **válido** si la conclusión se deduce necesariamente de las premisas. En ese caso, si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también será necesariamente verdadera. Un razonamiento, por tanto, es o no válido en virtud de su forma o estructura, no en virtud de la verdad o falsedad de las premisas. Los **enunciados** pueden ser **verdaderos o falsos**, pero los **razonamientos** sólo pueden ser **válidos o no válidos**, correctos o incorrectos.

Sin embargo, podríamos decir que en el éxito de un razonamiento influyen dos factores: la verdad de las premisas y la corrección o validez en la aplicación de las reglas usadas para inferir la conclusión.

RAZONAMIENTO VÁLIDO CON PREMISAS VERDADERAS	RAZONAMIENTO NO VÁLIDO CON PREMISAS VERDADERAS	RAZONAMIENTO VÁLIDO CON PREMISAS FALSAS
P1: Todos los perros son mamíferos. P2: Todos los caniches son perros. C: Todos los caniches son mamíferos.	P1: Todos los primates son mamíferos. P2: Todos los gatos son mamíferos. C: Todos los gatos son primates.	P1: Todos los perros son reptiles. P2: Todos los gatos son perros. C: Todos los gatos son reptiles.

La Lógica sólo se ocupa de la validez de los razonamientos deductivos, pero no de la verdad o falsedad de sus enunciados. Por ello decimos que la Lógica es una ciencia formal.

1.4. TIPOS DE LÓGICA

Hemos dicho que una proposición o enunciado es una oración (expresión con sentido completo y gramaticalmente correcta) que afirma o niega algo, es decir, que puede ser verdadera o falsa. Sólo son enunciados aquellas expresiones que poseen ambas propiedades:

SON PROPOSICIONES	**NO SON PROPOSICIONES** **(Ni V ni F)**	**NO SON PROPOSICIONES** **(Sin significado)**
Colón descubrió América. (V) Un mes tiene 237 días. (F) Pedro tiene hambre. (¿?)	¡Ojalá llueva! ¿Qué hora es? Cierra la puerta.	¡Hora ojalá! Pedro y llueva. 237 un tiene día.

La verdad o falsedad de las proposiciones atómicas depende de su correspondencia con la realidad, es decir, depende de la experiencia. La verdad o falsedad de las proposiciones moleculares depende tanto del valor veritativo de sus proposiciones atómicas como del tipo de relación que las une. Por ejemplo, la verdad de la proposición «Voy al cine» sólo depende de si voy efectivamente al cine o no, y la verdad de la proposición «Me llama mi novia» depende de si mi novia me llama realmente o no. Pero si digo «Si me llama mi novia entonces voy al cine», o digo «O me llama mi novia o voy al cine», ambas proposiciones pueden ser verdaderas aunque no vaya al cine o no me llame realmente mi novia, porque la relación que une ambas proposiciones atómicas no exige que ambas sean verdaderas a la vez. Sólo la proposición «Me llama mi novia y voy al cine» exige, para ser verdadera, que las proposiciones atómicas que la componen sean verdaderas.

Las distintas **partes de la Lógica** dependen del tipo de análisis que hacen de las proposiciones, de forma que tenemos:

- ❑ **LÓGICA PROPOSICIONAL O DE ENUNCIADOS**: Como ya sabemos, toma las proposiciones como un bloque, sin descomponerlas en sujeto y predicado, teniendo como elementos más simples las proposiciones atómicas, y ocupándose de las relaciones que se pueden establecer entre ellas.
- ❑ **LÓGICA DE PREDICADOS**: A veces no es suficiente tomar las proposiciones como un bloque y hay que descomponerlas en sujeto y predicado. Esto hace esta parte de la lógica, que trata los predicados desde el punto de vista intensional, es decir, como atribución de una propiedad a un sujeto.
- ❑ **LÓGICA DE CLASES**: Adopta el punto de vista de la extensión (conjunto de individuos a los que el predicado se aplica), interpretando los enunciados como operaciones con clases de conjuntos.
- ❑ **LÓGICA DE RELACIONES**: Estudia aquellos predicados que no se atribuyen a un individuo absolutamente sino en comparación con otro.

2. Los elementos de la Lógica proposicional

Todo lenguaje consta de una serie de **símbolos**, un conjunto de **reglas de formación** que determinan cómo pueden combinarse estos símbolos para construir expresiones gramaticalmente bien formadas y, por último, un conjunto de **reglas de transformación**, que indican cómo podemos pasar correctamente de unas expresiones bien formadas a otras. En un juego como el ajedrez, por ejemplo, los símbolos serían las 32 piezas y el tablero (un tenedor no es una pieza de ajedrez sino de cubertería); las reglas de formación determinarían el lugar que debe ocupar cada pieza en el tablero (un alfil colocado en la estantería no cumple las reglas de formación); por último, las reglas de transformación indicarían los movimientos que cada pieza puede realizar (un caballo arrojado a la pared o movido en diagonal no cumple dichas reglas). También en el lenguaje natural tenemos un conjunto de símbolos (palabras, letras, signos de puntuación, etc.), una serie de reglas de formación que permiten construir expresiones con sentido u oraciones, y unas reglas de transformación que permiten pasar de unas expresiones a otras (sabemos, por ejemplo, que la proposición «El gato se comió al ratón» puede sustituirse por «El ratón fue comido por el gato»).

Los elementos del cálculo proposicional son los siguientes:

- **SÍMBOLOS:**
  - ***Variables proposicionales o letras enunciativas***: Para simbolizar las proposiciones atómicas se recurre a las letras minúsculas del alfabeto a partir de la m o de la p: m, n, o, p, q, r, s, etc. Cada letra simboliza una proposición atómica cualquiera. Cuando se hace un uso metalingüístico (por ejemplo, al expresar las reglas lógicas) se usan las primeras letras del abecedario en mayúsculas: A, B, C, etc.
  - ***Constantes lógicas, operadores o conectores***: Son símbolos que denotan relaciones y operaciones lógicas. Sirven para establecer conexiones entre los enunciados, por lo que se denominan conectores o conectivas. En las lenguas naturales esta función conectiva es desempeñada por las conjunciones. Puesto que el tipo de relación que cada partícula conectiva establece es fijo, los símbolos correspondientes son denominados constantes lógicas. Las constantes lógicas más usuales en la Lógica proposicional son las siguientes:
    - ⇨ El **negador** (¬): Es la única constante que se aplica a un solo enunciado cambiándole su valor veritativo, y equivale a la negación del lenguaje natural. Así, si A es verdadera, ¬A es falsa, y viceversa. Se lee: no, no es el caso que.
    - ⇨ El **conjuntor** (∧): Corresponde a la conjunción «y» del lenguaje natural y lo que hace es dar lugar a una proposición molecular que es verdadera solamente cuando son verdaderas las proposiciones atómicas que la componen.
    - ⇨ El **disyuntor** (∨): Corresponde a la conjunción «o» del lenguaje natural y lo que hace es dar lugar a una proposición molecular que es verdadera cuando una de las proposiciones atómicas que la componen o ambas son verdaderas.

- ⇨ El **implicador** o **condicional** (→): Corresponde a la expresión «si... entonces» del lenguaje natural y lo que hace es afirmar que si el primero de los enunciados (antecedente) es verdadero, el segundo (consecuente) necesariamente también lo es (es decir, lo que no puede darse es el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso). La fórmula a que da lugar será verdadera siempre que no ocurra que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.
- ⇨ El **coimplicador** o **bicondicional** (↔): Corresponde a la expresión «si, y sólo si... entonces» del lenguaje natural y lo que hace es afirmar que si el primero de los enunciados es verdadero, el segundo también lo es, y que si el primero de los enunciados es falso, el segundo también lo es. La fórmula a que da lugar sólo será verdadera siempre que las proposiciones que la componen tengan el mismo valor de verdad (ambas verdaderas, ambas falsas).

- ***Símbolos auxiliares***: Paréntesis, corchetes, llaves, etc., para determinar el alcance de los conectores. Si no hay paréntesis, hay una jerarquía para determinar el signo dominante (1º↔, 2º →, 3º ∧ ó ∨). Ejemplo: p → r ∨ q es lo mismo que p → (r ∨ q).

– **REGLAS DE FORMACIÓN:**

- Son todas las reglas que establecen cómo deben combinarse correctamente los símbolos de este lenguaje formal. A toda expresión formada correctamente según estas reglas se le llama fórmula. Las reglas de formación del cálculo proposicional son las siguientes:
  - ⇨ Una letra enunciativa es una fórmula bien formada. Ejemplo: p, q, r, s, t, etc.
  - ⇨ Si 'A' es una fórmula, '¬A' también lo es. Ejemplo: ¬p, ¬q, ¬r, etc.
  - ⇨ Si 'A' y 'B' son fórmulas, entonces 'A ∨ B', 'A ∧ B', 'A → B' y 'A ↔B' también lo son. Ejemplo: p ∧ q, ¬p ∨ ¬q, ¬p→ (r ∧ s), (¬p → q) ↔ (p ∨ q), etc.
  - ⇨ No hay más fórmulas bien formadas si no son según las reglas anteriores.

– **REGLAS DE TRANSFORMACIÓN:**

- Llamadas también reglas de inferencia porque son las que determinan la forma en que podemos pasar correctamente de unas fórmulas bien formadas a otras equivalentes, para así poder construir razonamientos válidos. Son, por lo tanto, necesarias para poder realizar deducciones lógicas. Por el momento dejaremos estas reglas que ya trataremos en la parte dedicada a la deducción.

3. Semántica de la Lógica proposicional

3.1. FORMALIZACIÓN O SIMBOLIZACIÓN

La formalización de un lenguaje es una operación consistente en traducir las expresiones de ese lenguaje por símbolos, en nuestro caso por símbolos del cálculo proposicional, de manera que los enunciados del lenguaje natural se transformen en fórmulas con las que resulte más fácil operar para comprobar la validez de los razonamientos. Puesto que ya conocemos los símbolos de la Lógica proposicional, veamos a continuación su correspondencia con el lenguaje natural.

Las ***variables proposicionales*** (m, n, p, q, r, s, t,…) se usan para simbolizar las proposiciones simples del lenguaje natural. Ejemplos:

Pedro es un buen estudiante = p

Llueve = q

Debajo de la bóveda se ve un retablo con un lienzo ennegrecido = r

El ***negador*** (¬) se usa para simbolizar expresiones del lenguaje natural tales como "no", "no es el caso que", "es falso que", "no es posible que", "es imposible que",… Cuando afecta a una proposición simple se pone simplemente delante de ella, pero cuando afecta a una proposición compleja, ésta debe ir entre paréntesis y el negador delante del mismo. Además, existen ocasiones en las que un negador puede afectar a otro negador. Ejemplos:

Pedro no es un buen estudiante = $\neg$ p

No es verdad que estudie todos los días = $\neg$ q

Es imposible que mañana no vaya a clase = $\neg\neg$ r

Es falso que si el alumno se copia sea imposible que apruebe = $\neg (s \rightarrow \neg t)$

El ***conjuntor*** (Λ) se usa para simbolizar la conjunción "y" del lenguaje natural y lo que hace es afirmar que los dos enunciados que conecta son verdaderos. Por eso, hay además otras conjunciones del lenguaje natural ("pero", "aunque", "también", "además", "ni", etc.) que poseen su mismo valor lógico, por lo que también pueden sustituirse por el mismo símbolo. Ejemplos:

Juan camina y Pedro descansa = $p \land q$

Los tejados son de pizarra y las puertas de madera = $r \land s$

Me van bien los estudios pero no apruebo = $t \land \neg u$

Aunque me rechaces, te querré siempre y no te olvidaré = $m \land (n \land \neg p)$

No es cierto que me vaya a marchar y no quiera verte ni acordarme de ti = $\neg [q \land (\neg r \land \neg s)]$

El ***disyuntor*** (V) se usa para simbolizar la conjunción "o" del lenguaje natural (y otras equivalentes como "bien", "sea… sea", "ya… ya", etc.) y lo que hace es afirmar que al menos uno de los dos enunciados que conecta es verdadero. Ejemplos:

Se solicita abogado o contable = $p \lor q$

Me entero de la situación política leyendo "El País" o "La Vanguardia" = $p \lor q$

Hay que demostrar la proposición bien por el método directo bien por el indirecto = $p \lor q$

No es cierto que vaya a salir el jueves o el viernes = $\neg (p \lor q)$

Ya sea porque no tuvieron suerte, ya sea por falta de ambición, perdieron el partido = $(\neg p \lor \neg q) \land r$

Normalmente la disyunción tiene un sentido inclusivo (al menos uno de los dos enunciados que conecta es verdadero, pero pueden serlo los dos), pero en algunas ocasiones se emplea la disyunción exclusiva, que significa que sólo uno de los dos enunciados es verdadero (o uno o el otro, pero no ambos). Para expresar este tipo de relación entre las proposiciones se puede usar el coimplicador negado.

El ***implicador*** ($\rightarrow$) se usa para simbolizar la expresión "si… entonces" del lenguaje natural (y otras equivalentes como "por lo tanto", "en consecuencia", "luego", etc.) y lo que hace es afirmar que en el caso de que el primero de los enunciados (antecedente) sea verdadero, el segundo (consecuente) necesariamente también lo será (no puede darse el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso). Al formalizar los enunciados es necesario descubrir la relación lógica que existe entre ellos y no fiarse siempre de las apariencias. Por ejemplo, la proposición «Estudia y aprobarás» es equivalente a «Si estudias entonces aprobarás» por lo que hay que formalizarla con el implicador, no con el conjuntor. Además no tiene por qué haber una conexión real entre ambas proposiciones, sólo que se cumpla esta relación lógica. Ejemplos:

Si Colón descubrió América entonces los gusanos son invertebrados = $p \rightarrow q$

Cuando hay abundancia, nadie muere de hambre = $p \rightarrow \neg q$

Con tal de que me digas las preguntas me prepararé las respuestas y no suspenderé = $p \rightarrow (q \land \neg r)$

Eres licenciado de modo que es imposible que no sepas leer ni escribir = $p \rightarrow \neg (\neg r \land \neg q)$

El ***coimplicador*** ($\leftrightarrow$) corresponde a la expresión "si y sólo si… entonces" del lenguaje natural (y a otras equivalentes como "... es igual a...", "… es lo mismo que...", "... equivale a...", etc.) y lo que hace es afirmar que ambos enunciados tienen el mismo valor veritativo: si el primero es verdadero, el segundo también lo es, y si es falso, también lo es el segundo. Ejemplos:

Sólo estudiaré si tú lo haces también = $p \leftrightarrow q$

Sólo si no has tenido una experiencia traumática puedes ser feliz = $\neg p \leftrightarrow q$

Si no es verdad lo que dices, entonces únicamente en el caso de que te retractes te volveré a dirigir la palabra = $\neg p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$

Proposiciones simples lingüísticamente diferentes pero que vengan a expresar lo mismo han de ser formalizadas mediante la misma variable proposicional.

Es importante identificar todas las negaciones que puedan aparecer en el texto a formalizar y utilizar convenientemente el negador. Conviene tener presente que las negaciones no siempre aparecen al comienzo de un enunciado sino intercaladas en el mismo (p.e., «Hoy no hace calor» = $\neg p$). También conviene tener presente que determinadas ocurrencias de la doble negación en español expresan en realidad una simple negación (p.e., «*No* quiero *ni* pensar en ello» = $\neg p$). Por último, es importante identificar cuándo un enunciado en forma afirmativa expresa en realidad la negación de otro enunciado que aparece en el mismo texto a formalizar (p.e., «Si Juan aprueba el examen, se irá a las Bahamas; pero si suspende, se quedará en casa deprimido» = $(p \rightarrow q) \land (\neg p \rightarrow r)$).

3.2. LAS TABLAS DE VERDAD

Una vez que hemos formalizado una proposición resulta mucho más fácil operar con ella. Lo primero que podemos hacer con ella es averiguar en qué casos es verdadera y en qué casos no. La Semántica es aquella parte del lenguaje que se ocupa de la relación entre los símbolos y su significado, pero ya dijimos que a la Lógica no le interesa el significado empírico de las proposiciones; lo único que le interesa de su significado es su valor veritativo: su verdad o falsedad. Como la verdad de las proposiciones complejas depende del valor veritativo de sus proposiciones simples (variables) y del tipo de relación que las une (constantes o conectores), la Lógica usa un método para demostrar semánticamente una fórmula cualquiera: el método de las tablas de verdad. Este método consiste en calcular en qué casos una proposición compleja es verdadera y en qué casos es falsa.

Interpretar un símbolo consiste en darle un significado. La Lógica proposicional, como la mayoría de los tipos de lógica, es una lógica bivalente, lo cual quiere decir que cada proposición simple o variable sólo puede tener dos interpretaciones o significados: verdadero (1) o falso (0). Un caso es una posible combinación de tales valores en sus variables, de forma que mientras más variables tenga una fórmula más casos posibles habrá.

Así, en una fórmula que contenga una única variable (p.e., $p \rightarrow p$) sólo hay dos casos posibles: que "p" sea verdadera o que sea falsa, mientras que en una que contenga dos variables (p.e., $p \rightarrow q$) hay cuatro casos posibles: 1) que ambas sean verdaderas; 2) que ambas sean falsas; 3) que "p" sea verdadera y "q" falsa; y 4) que "p" sea falsa y "q" verdadera. En una fórmula de tres variables hay ocho posibles casos; en una de cuatro, dieciséis, y así, sucesivamente. Hay una fórmula para hallar el número de casos (x) de una proposición molecular: $\mathbf{x = 2^n}$, donde **n** es el número de variables de la fórmula.

Una variable:

p
1
0

Dos variables:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Tres variables:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Cada uno de los conectores o constantes lógicas se define semánticamente mediante una tabla de verdad que muestra sus posibles valores veritativos según los casos. Estas son las tablas de verdad de los conectores y del negador:

NEGADOR:

A	¬ A
1	0
0	1

CONJUNTOR:

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

DISYUNTOR:

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

IMPLICADOR:

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

COIMPLICADOR:

A	B	A ↔ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejemplo de tabla de verdad:

p	q	r	(p	∧	¬	r)	↔	[q	∨	¬	(¬	r	→	p)]
1	1	1	1	0	0	1	**0**	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	**1**	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	**1**	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	**0**	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	**0**	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	**0**	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	**1**	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	**0**	0	1	1	1	0	0	0

Aplicando este método de las tablas de verdad podemos comprobar que existen tres tipos de fórmulas en función de su resultado:

- **CONSISTENCIA:** Se denomina fórmula consistente o indeterminada cuando su tabla de verdad presenta una combinación de valores de verdad (1) y de falsedad (0). Esto significa que su valor veritativo depende de cada uno de los posibles casos, por lo que depende de la experiencia, ya que en unos casos puede ser verdadera y en otros casos falsa.
- **CONTRADICCIÓN:** Una fórmula es una contradicción cuando en todos los casos su valor veritativo es "0", es decir, es siempre falsa, independientemente de los valores de verdad de las variables que la constituyen, por lo que es universalmente falsa.
- **TAUTOLOGÍA:** Una fórmula es tautológica cuando su valor veritativo es siempre "1", es decir, cuando es verdadera en todos los casos. Estas fórmulas son verdaderas *a priori*, es decir, independientemente de la experiencia, universalmente válidas. Las fórmulas tautológicas son verdades lógicas, no empíricas. Éstas son las que más interesan a la

Lógica pues, gracias a ellas, podemos averiguar si una conclusión se deriva o no a partir de unas determinadas premisas. Basta, para ello, con construir una fórmula uniendo las premisas mediante conjuntores y conectándolas a la conclusión por medio de un implicador. A continuación hacemos la tabla de verdad correspondiente y si el resultado es una tautología eso significa que queda demostrada semánticamente la validez del razonamiento. Todas las leyes lógicas que veremos a continuación pueden demostrarse por este sistema.

4. Sintaxis de la Lógica proposicional: la deducción formal

Existe otro método más operativo para demostrar la validez de un razonamiento: la **deducción formal**. Consiste en un procedimiento de derivación para probar la validez de una conclusión, partiendo de premisas iniciales y deduciendo nuevas premisas intermedias mediante **reglas de inferencia**, cuyo uso se justifica. El procedimiento demostrativo en conjunto tiene cierta semejanza con la manera «natural» de deducir. Esas reglas de inferencia son verdades lógicas, es decir, que si se presentan como fórmula condicional y se realizan sus respectivas tablas de verdad, se comprobará que son tautologías.

En una deducción encontraremos unos **supuestos** y unas **reglas de inferencia**. Los supuestos pueden ser **premisas** (**supuestos previos**) o bien **supuestos provisionales** o subsidiarios, que sirven momentáneamente de apoyo en el curso de la deducción pero de los cuales hay que desembarazarse antes del final de la misma (llamándose esto descarga o cancelación de supuestos).

La deducción formal es una secuencia finita de fórmulas tales que cada una de ellas es un supuesto previo, un supuesto provisional o una fórmula que se deriva lógicamente de otra u otras anteriores por inferencia inmediata (por la aplicación de una sola regla de inferencia).

La notación simbólica de una derivación es la siguiente: la deducción se indica o anota poniendo en hilera las premisas separadas por comas y a continuación de las mismas el deductor $\vdash$ seguido de la conclusión: $p \rightarrow \neg q \wedge r, p \rightarrow s, s \wedge r \rightarrow \neg \neg m, \neg \neg p \vdash m$.

La deducción se realiza así: se colocan en columna las premisas y las fórmulas inferidas de la siguiente manera:

- ❑ Se numeran en la izquierda a partir del número 1.
- ❑ Las premisas llevan un guión a la izquierda del número.
- ❑ Los supuestos provisionales se señalan con un ángulo recto (┌) antes del número, que se unirá con una línea recta a otro ángulo (└) correspondiente a la línea que los cancela.
- ❑ Se pone a la derecha un comentario: las siglas de la regla por la que se infiere la línea y los números de las líneas a las que se ha aplicado la regla.

Veamos a continuación las llamadas **reglas básicas de inferencia**. Gentzen seleccionó estas ocho porque sirven para introducir o eliminar cada uno de los cuatro conectores básicos, y porque con ellas se podrían efectuar todas las transformaciones de fórmulas posibles en el cálculo proposicional.

ELIMINACIÓN DEL IMPLICADOR (EI) O «MODUS PONENS» (MP):

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{A \qquad} \\ B \end{array}$$

Se usan letras mayúsculas para indicar que dichas letras pueden ser sustituidas por cualquier fórmula. Se ponen las premisas de la regla en columnas seguidas de una línea horizontal, bajo la cual se escribe la conclusión. Esto quiere decir que si en el curso de la deducción se dan fórmulas en la forma de las premisas de la regla entonces puede escribirse una línea con la fórmula de la conclusión.

INTRODUCCIÓN DEL IMPLICADOR (II) O TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN (TD):

$$\begin{array}{l} A \\ . \\ . \\ \underline{B \qquad} \\ A \rightarrow B \end{array}$$

Se basa en que si de una premisa ‘A’ y cualquier conjunto de fórmulas, que puede ser vacío, podemos deducir una conclusión ‘B’ entonces podemos decir que la premisa implica la conclusión.

ELIMINACIÓN DEL CONJUNTOR (EC) O SIMPLIFICACIÓN (SIMPL.):

$$\begin{array}{c} \underline{A \wedge B} \\ A \\ \\ \underline{A \wedge B} \\ B \end{array}$$

Se basa en la idea de que si una conjunción de proposiciones es verdadera también lo son cada uno de sus miembros.

INTRODUCCIÓN DEL CONJUNTOR (IC) O PRODUCTO LÓGICO (PROD.):

$$\begin{array}{l} A \\ \underline{B \qquad} \\ A \wedge B \end{array}$$

Se basa en la intuición de que si podemos afirmar dos verdades por separado también podemos afirmar la verdad de su unión.

ELIMINACIÓN DEL DISYUNTOR (ED) O PRUEBA POR CASOS (CAS.):

$$\begin{array}{l} A \lor B \\ \left[\begin{array}{l} A \\ . \\ . \\ C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} B \\ . \\ . \\ \underline{C\quad} \end{array}\right. \\ \;C \end{array}$$

Se basa en el dilema de la lógica clásica: si de todos los casos de una disyunción se sigue la misma conclusión podemos afirmar ésta sin miedo a equivocamos.

INTRODUCCIÓN DEL DISYUNTOR (ID) O ADICIÓN (AD.):

$$\frac{A}{A \lor B} \qquad \frac{B}{A \lor B}$$

Se basa en que si tenemos una fórmula verdadera su valor de verdad no cambia al añadirle cualquier otra fórmula por medio de un disyuntor (recordemos la definición del disyuntor que dimos antes).

ELIMINACIÓN DEL DOBLE NEGADOR (EDN):

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Se basa en la intuición de que negar dos veces una cosa es lo mismo que afirmarla (recordemos la definición del negador).

INTRODUCCIÓN DEL NEGADOR (IN) O REDUCCIÓN AL ABSURDO (ABS.):

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A \\ . \\ . \\ \underline{B \land \neg B} \end{array}\right. \\ \;\neg A \end{array}$$

Se basa en la intuición de que toda proposición que da lugar a una contradicción es inadmisible, por lo que debe ser negada.

Como puede verse, hay dos tipos de deducción:

- La **deducción directa**: cuando la conclusión se deduce directamente de las premisas.
- La **deducción indirecta** (Cas., Abs., TD): cuando es necesario suponer premisas adicionales provisionalmente para obtener la conclusión. Todo supuesto provisional se señala con un ángulo recto (┌) antes del número, que se unirá con una línea recta a otro ángulo (└) correspondiente a la línea que los cancela. Los enunciados que haya en el interior de un supuesto provisional no podrán utilizarse fuera.

El uso de las reglas básicas es, en principio, suficiente para resolver todo problema deductivo que tenga solución en Lógica proposicional. Su empleo debe atenerse a la siguiente estrategia:

1. Asegurarse de la correcta formalización del argumento si éste ha sido traducido del lenguaje ordinario.
2. Una vez dispuestas en columna y ordenadas las premisas se intentará extraer de las mismas por sucesivas aplicaciones de las reglas la conclusión o las fórmulas que puedan acercamos a ella.
3. Eventualmente, cabe el recurso a supuestos provisionales de tipo directo. Si la conclusión o la fórmula intermedia que necesitamos es una implicación, hemos de suponer su antecedente, llegar a su consecuente y usar el teorema de deducción. Si necesitamos usar una premisa o una fórmula intermedia que tenga la forma de una disyunción, es preciso suponer sus miembros y usar la prueba por casos.
4. Si fallan estos intentos, se puede recurrir a la deducción indirecta, suponiendo la negación de la conclusión y aplicando la reducción al absurdo.

El cálculo proposicional se facilita y abrevia si se añaden a las reglas básicas de Gentzen otras nuevas fundadas en ellas, que reciben, por tanto, el nombre de **reglas derivadas**. Estas reglas expresan leyes lógicas que podemos demostrar tanto semánticamente (con tablas de verdad), como sintácticamente (por deducción y usando las reglas básicas). Las más útiles son éstas:

LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO (SIL.):

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array}}{A \rightarrow C}$$

LEY DE IDENTIDAD (ID.):

$$\frac{A}{A}$$

LEY DE CONTRAPOSICIÓN (CP.):

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

«MODUS TOLLENS» (MT):

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

INTRODUCCIÓN DE DOBLE NEGADOR (IDN):

$$\frac{A}{\neg\neg A}$$

PRINCIPIO DE NO CONTRADICCIÓN (PNC):

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

PRINCIPIO DE TERCIO EXCLUSO (PTE):

$$A \vee \neg A$$

SILOGISMO DISYUNTIVO (SD):

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg A \end{array}}{B}$$

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \end{array}}{A}$$

«EX CONTRADICTIONE QUODLIBET» (ECQ):

$$\frac{A \wedge \neg A}{B}$$

LEYES DE MORGAN (DM_1 Y DM_2):

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$$

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$