DEDUCCIÓN NATURAL

Lee el siguiente texto. ¿Se puede decir que es un texto argumentativo? ¿Se trata de un argumento válido? ¿Podría ayudarnos a comprobarlo lo que sabemos de lógica proposicional? Si utilizamos los símbolos de la lógica proposicional para formalizar el argumento, nos encontraremos con un esquema de inferencia. Hazlo:

"Si digo siempre la verdad, los demás confían en mí. Y si los demás confían en mí, me siento seguro e independiente. Cuando me siento seguro e independiente, soy capaz de afrontar cualquier problema. Como yo digo siempre la verdad, se deduce que soy capaz de afrontar cualquier problema".

Conocemos ya un método que puede utilizarse para comprobar la validez de los esquemas de inferencia, el de las Tablas de Verdad. El problema, en este caso y, en general, en los argumentos que desarrollamos en la vida cotidiana, es que en el esquema de inferencia aparecen más de tres variables proposicionales y sabemos que las Tablas de Verdad dejan de ser operativas en esos casos. Podríamos recurrir a otros métodos de decisión más adecuados para comprobar su validez, pero también podemos aplicar lo que se conoce como **cálculo de deducción natural**.

El **cálculo de deducción natural** es un cálculo que permite comprobar la validez de cualquier argumento utilizando reglas de inferencia. Las **reglas de inferencia** se pueden definir como instrucciones para poder realizar inferencias válidas. Estas reglas se construyen a partir de las leyes de la lógica proposicional, como en el siguiente **ejemplo**:

A partir de la Ley *Modus ponendo ponens* $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ podemos construir la regla *Modus ponendo ponens*: Si tomamos como premisas un condicional y la afirmación del antecedente, entonces podemos inferir la afirmación del consecuente (hemos convertido la ley en una serie de instrucciones). Su expresión simbólica sería la que se puede ver en la siguiente tabla, que debes completar (es aconsejable utilizar las mayúsculas X, Y, Z…):

Nombre de la ley	**Expresión de la ley**	**Expresión de la Regla**
1. Modus ponendo ponens.	$[(p \to q) \wedge p] \to q$	**MP** $X \to Y$ $\underline{X \qquad\qquad}$ Y
2. Modus tollendo tollens.	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$	**MT** $X \to Y$ $\underline{\neg Y \qquad\qquad}$ $\neg X$
3. Modus tollendo ponens (silogismo disyuntivo).	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$ $[(p \vee q) \wedge \neg q] \to p$	**SD** $X \vee Y$ $\underline{\neg X \qquad\qquad}$ Y $X \vee Y$ $\underline{\neg Y \qquad\qquad}$ X
4. Ley de doble negación.	$\neg \neg p \to p$	**DN**
5. Ley de simplificación.	$(p \wedge q) \to p$ $(p \wedge q) \to q$	**Simp** $\wedge$
6. Ley de contraposición (del condicional).	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	**Contraposición** $\to$
7. Ley del silogismo hipotético.	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	**SH**
8. Ley de adición.	$p \to (p \vee q)$ $q \to (q \vee p)$	**Ad**.

9. Leyes del bicondicional.	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$ $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$ $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \to (p \leftrightarrow q)$ $(p \leftrightarrow q) \to [(p \to q) \wedge (q \to p)]$	**Ley del Bicondicional**
10. Leyes de De Morgan: **1.** Cambiar $\wedge$ por $\vee$, o $\vee$ por $\wedge$. **2.** Negar cada miembro de la conjunción o disyunción. **3.** Negar la fórmula completa.	$\neg (p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ $\neg (p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$	**DMorgan**

UN EJEMPLO DE DEDUCCIÓN NATURAL

Una vez que hemos conseguido esas reglas de inferencia podremos utilizarlas para analizar razonamientos como el del ejemplo del que partíamos ("Si digo siempre la verdad…) en la primera página:

"Si digo siempre la verdad, los demás confían en mí. Y si los demás confían en mí, me siento seguro e independiente. Cuando me siento seguro e independiente, soy capaz de afrontar cualquier problema. Como yo digo siempre la verdad, se deduce que soy capaz de afrontar cualquier problema".

$$\{\underbrace{(p \to q)}_{P_1} \wedge \underbrace{[q \to (r \wedge s)]}_{P_2} \wedge \underbrace{[(r \wedge s) \to t]}_{P_3} \wedge \underbrace{p}_{P_4}\} \to \underbrace{t}_{C}$$

¿Puedo demostrar que la conclusión "t" se deduce de esas cuatro premisas? Mediante el cálculo de deducción natural, el procedimiento sería el siguiente:

Demostrar "t"

—1 $p \rightarrow q$
—2 $q \rightarrow (r \wedge s)$
—3 $(r \wedge s) \rightarrow t$
—4 p
5 q MP 1,4
6 $r \wedge s$ MP 2,5
7 t MP 3,6

Hemos demostrado, siguiendo las reglas de la Deducción Natural, que "t" se deduce efectivamente de esas 4 premisas. Podemos decir, entonces, que el argumento de partida es válido (o sea, deductivo; o sea, una ley de la Lógica proposicional). Además, al hacer la demostración, hemos creado un nuevo argumento, pero con seis premisas en lugar de 4:

$$\{ \underbrace{(p \rightarrow q)}_{P_1} \wedge \underbrace{[q \rightarrow (r \wedge s)]}_{P_2} \wedge \underbrace{[(r \wedge s) \rightarrow t]}_{P_3} \wedge \underbrace{p}_{P_4} \wedge \underbrace{q}_{P_5} \wedge \underbrace{(r \wedge s)}_{P_6} \} \rightarrow \underbrace{t}_{C}$$

Ejercicio 1 Copia la expresión de cada regla al lado de su nombre y realiza las demostraciones (deducciones) que se piden para cada una de ellas:

1.1 ***Modus ponendo ponens*** **(MP):**

<table>
<tr><td>1.1.1 Demostrar “p”
.

--1 ¬ m → ¬ n
--2 t → ¬ m
--3 ¬ n → p
--4 t</td><td>Redacta proposiciones para ese argumento:

m:
¬ m:
n :
¬ n:
p:
t:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.1.2 Demostrar “¬ p V ¬ q”
--1 ¬ (r Λ s) → m
--2 m → (¬ p V ¬ q)
--3 ¬ (r Λ s)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.1.3 Demostrar “ ¬ t”
--1 p → ¬ q
--2 ¬ q → n
--3 n → m
--4 m → ¬ r
--5 ¬ r → ¬ t
--6 p</td></tr>
</table>

1.1.4 Demostrar "¬ (r → ¬ s)" --1 (p Λ q) → ¬ n --2 ¬ t → (p Λ q) --3 ¬ n → ¬ (r → ¬ s) --4 ¬ t
1.1.5 Demostrar "¬ (¬ m Λ ¬ n)" --1 (¬ s V ¬ t) → (¬ p → ¬ q) --2 (¬ p → ¬ q) → w --3 w → ¬ (¬m Λ ¬ n) --4 ¬ s V ¬ t
1.1.6 Demostrar "p → (¬ t V ¬ u)" --1 ¬ q → [p → (¬ t V ¬ u)] --2 (¬ m → ¬ n) → (r V s) --3 (r V s) → ¬ q --4 ¬ m → ¬ n

1.2 *Modus tollendo tollens* (M.T.):

1.2.1 Si se estructura la historia desde el punto de vista de la parapsicología, los hechos se interpretarán como consecuencias de causas paranormales. Pero los hechos no pueden interpretarse así. Por tanto, la historia no se puede estructurar desde las afirmaciones de la parapsicología.	
1.2.2 Si fueras un mandarín de la China, vivirías con lujo y no tendrías que trabajar. Y, si vivieses de esa manera, te distraerías haciendo viajes alrededor del mundo o alimentando los faisanes de tu majestuoso palacio. Como no es el caso que te distraigas con tales cosas, deduzco que no eres un mandarín de la China.	

1.2.3 Demostrar "$\neg [r \rightarrow (s \wedge t)]$"

--1 $(\neg m \wedge \neg n) \rightarrow q$

--2 $\neg (\neg u \rightarrow \neg w)$

--3 $q \rightarrow (\neg u \rightarrow \neg w)$

--4 $[r \rightarrow (s \wedge t)] \rightarrow (\neg m \wedge \neg n)$

1.2.4 Demostrar "¬ (r Λ s)" --1 ¬ (p → q) --2 (r Λ s) → n --3 (u V w) → (p → q) --4 n → (u V w)
1.2.5 Demostrar "¬ (¬ u → ¬ w) --1 ¬ (¬ m → ¬ n) --2 (¬ u → ¬ w) → [¬ p → (¬ r → ¬ s)] --3 [¬ p → (¬ r → ¬ s)] → (¬ m → ¬ n)
1.2.6 Demostrar "¬ p" --1 u → (w V m) --2 s → t --3 q → r --4 p → q --5 t → u --6 ¬ (w V m) --7 r → s

1.2.7 Demostrar “ $\neg (\neg p \lor \neg q)$”

--1 $w \rightarrow (r \land \neg s)$

--2 $\neg (u \rightarrow h)$

--3 $t \rightarrow (m \lor \neg n)$

--4 $(r \land \neg s) \rightarrow (u \rightarrow h)$

--5 $(m \lor \neg n) \rightarrow w$

--6 $(\neg p \lor \neg q) \rightarrow t$

1.3 Silogismo disyuntivo (S.D.):

1.3.1. La Tierra es el centro del universo o la Luna es el satélite de la Tierra. Pero la Tierra no es el centro del universo, Lugo la Luna es el satélite de la Tierra.	
1.3.2 Este hombre o es abogado o es parlamentario. Pero, o no es parlamentario o le habría visto en las sesiones plenarias. Pero no le he visto jamás. Luego es abogado.	

1.3.3 Demostrar "q"

--1 $\neg t$

--2 $(p \rightarrow m) \vee q$

--3 $t \vee \neg s$

--4 $(r \wedge \neg w) \vee \neg (p \rightarrow m)$

--5 $s \vee \neg (r \wedge \neg w)$

1.3.4 Demostrar “¬ n” --1 ¬¬¬ q --2 ¬ n V ¬¬ t --3 ¬¬¬ m V ¬¬ q --4 ¬¬¬ t V s --5 ¬ s V ¬¬ m
1.3.5 Demostrar “p” --1 ¬¬¬ (¬ u ↔ ¬ w) --2 p V ¬¬ (¬ q → ¬ r) --3 ¬¬¬ (¬ m Λ ¬ t) V ¬¬ (¬ u ↔ ¬ w) --4 ¬¬¬ (¬ q → ¬ r) V ¬¬ (¬ m Λ ¬ t)
1.3.6 Demostrar “m V n” --1 ¬ s --2 ¬ q → ¬ r --3 r V s --4 ¬¬ q → (m V n)

1.3.7 Demostrar “m → n” --1 ¬ w --2 ¬¬ t → ¬ s --3 ¬¬¬t → (m → n) --4 w V s
1.3.8 Demostrar “p” --1 ¬ t V ¬ s --2 ¬ q → t --3 ¬¬ s --4 ¬ q V p
1.3.9 Demostrar “n” --1 s V m --2 s → q --3 w → ¬ r --4 ¬ m --5 q → r --6 w V t --7 t → n

1.4 Regla de eliminación del negador (E.N.):

1.4.1 "Éste es un televisor Sony. Si es un Sony, funcionará de maravilla y, si funciona de maravilla la imagen no saldrá borrosa. ¡Pero la imagen sale borrosa! Así que más vale que lo tire a la basura y me compre un molinillo de café". **"De una contradicción se puede deducir cualquier cosa":** $\vdash Y$ $\mathbf{X}$ $\neg\ \mathbf{X}$ ——— $\mathbf{Y}$
1.4.2 Demostrar "t" -- 1 $\neg p$ -- 2 $m \rightarrow \neg r$ -- 3 $\neg\neg m$ -- 4 $\neg\neg p \vee \neg\neg r$

1.5 Regla de introducción del condicional o Teorema de la deducción (T.D.):

1.5.1 "Para que te pongan la medallita por los servicios prestados has de mostrarte sumiso e interesado. Tú ya te muestras sumiso normalmente. Por tanto, si te muestras interesado, conseguirás la medallita".

"Si queremos demostrar que X → Y,
podemos introducir como supuesto X;
si a partir de ese supuesto podemos
demostrar Y, cerraremos el supuesto
y podremos afirmar que X → Y":

├ X → Y
- X
.
.
.
- Y

X → Y

1.5.2 Demostrar "¬ p → q"

-- 1 q ∨ t
--2 t → r
--3 (r ∧ s) → p
--4 s